Université Sidi Mohammed Ben Abdellah
Ecole Nationale des Sciences Appliquées de Fès
Année Universitaire 2014-2015 S1

Série 3 : Espace Vectoriel

Exercice 1 *On munit $\mathbb{R}^3$ de l'addition composante par composante définie par :*

$$(x, y, z) + (u, v, w) = (x + u, y + v, z + w),$$

et de la multiplication externe a opérateurs dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$c.(x, y, z) = (cx, cy, cz).$$

1. *Vérifier que $\mathbb{R}^3$ est un espace vectoriel pour l'addition composante par composante et cette multiplication externe.*
2. *$\mathbb{Q}^3$ est-il un sous espace vectoriel du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}^3$?*
3. *$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tel que $xz = 0\}$ et $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tel que $x + y = 0\}$ sont-ils des sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$. Si oui, calculer leur dimensions.*

Exercice 2 *Soit $H = \{aX^2 + bX + c$ telque $a, b, c \in \mathbb{R}\}$.*

1. *Vérifier que H est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.*
2. *Soient f_1, f_2 et f_3 des fonctions de H définies par :*

$$f_1(x) = x^2, f_2(x) = (x - 1)^2, f_3(x) = (x + 1)^2.$$

a) *Montrer que (f_1, f_2, f_3) est une base de H.*
b) *Déterminer les coordonnées des fonctions g et h dans cette base où $g(x) = 12$ et $h(x) = 3x^2 - 1$.*

Exercice 3 *Soit E le sous $\mathbb{R}$-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ engendré par $\{e_1 = (1, 2, 0), e_2 = (0, 1, 1), e_3 = (1, 0, -2)\}$. Déterminer la dimension de E et donner une base de E.*

Exercice 4 *Soient $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 0\}$ et $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x - y + 2z = 0\}$*

1. *Montrer que E et F sont deux sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.*
2. *Déterminer une base de E et une base de F.*
3. *Déterminer une base de $E \cap F$ et une base de $E + F$.*

---

4. *Déterminer un supplémentaire de E dans $\mathbb{R}^3$.*

Exercice 5 *Soit E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel définie par : $E = \{aX^3 + bX^2 + cX + d$ telque $a, b, c, d \in \mathbb{R}\}$ et soient $F = \{(X-1)^2(aX+b)$ telque $a, b \in \mathbb{R}\}$ et $G = \{(X+1)^2(aX+b)$ telque $a, b \in \mathbb{R}\}$.*

1. *Montrer que F et G sont deux sous espaces vectoriels de E.*
2. *Donner une base B_1 de F et une base B_2 de G.*
3. *En déduire que $E = F \oplus G$.*

Exercice 6 *Soit $E = \{ae^x + be^{-x}$ telque $a, b \in \mathbb{R}\}$ le sous ensemble du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ des applications de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$.*

1. *Montrer que E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.*
2. *On désigne par i et j les éléments de E définies par $i(x) = e^x$ et $j(x) = e^{-x}$. Montrer que $\{i, j\}$ est une base de E.*
3. *On désigne par r et s les éléments de E définies par $r(x) = e^x + e^{-x}$ et $s(x) = e^x - e^{-x}$. Montrer que $\{r, s\}$ est une base de E.*
4. *Calculer les coordonnées de i et j dans la base $\{r, s\}$.*